

COMPITO DI ARITMETICA

13 gennaio 2014

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Esercizio 1.

- a) Contare le stringhe (a_0, \dots, a_9) , con $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ per ogni i , in cui gli a_i pari sono più degli a_i dispari.
b) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\{(a_0, \dots, a_9) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^{10} \mid \sum_{i=0}^9 (-1)^i a_i \equiv 0 \pmod{6}\}.$$

Esercizio 2.

Risolvere il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \equiv 0 & (\text{mod } 15) \\ 30x \equiv -6 & (\text{mod } 81) \end{cases}$$

Esercizio 3.

Sia G in gruppo, sia p un numero primo e siano H e K due distinti sottogruppi normali di indice p tali che $H \cap K = \{id\}$.

- a) Dimostrare che $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
b) Determinare il numero di sottogruppi di G di ordine p .

Esercizio 4.

Sia $f(x) = x^9 - 1$.

- a) Dimostrare che $f(x)$ ha un fattore irriducibile di grado 6 su \mathbb{F}_{11} .
b) Determinare il grado del campo di spezzamento di $f(x)$ su \mathbb{Q} e su $\mathbb{Q}(\zeta_3)$, dove $\zeta_3 \in \mathbb{C}$ è una radice terza primitiva dell'unità.